

OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto (0,1).

(b) [1'25 puntos] ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2+d & \text{si } x > 0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto (0,1)? (justifica la respuesta)

Solución

(a)

Como $f(x)$ admite recta tangente en (0,1), nos dice que es derivable en $x = 0$, continua en $x = 0$ y además $f(0) = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases} ; \quad f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como es continua en $x = 0$, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x}) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b ; \text{ por tanto } b = 1$$

Como es derivable en $x = 0$, $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (a) = a$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{-x}) = -e^0 = -1 ; \text{ por tanto } a = -1$$

(b)

Si $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2+d & \text{si } x > 0 \end{cases}$ admite recta tangente en (0,1) tiene que ser derivable en $x = 0$, continua en

$$x = 0 \text{ y además } g(0) = 1. \text{ Su derivada sería } g'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 2cx & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si es continua en $x = 0$, $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x}) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (cx^2 + d) = d ; \text{ por tanto } d = 1$$

Si es derivable en $x = 0$, $g'(0^+) = g'(0^-)$

$$g'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2cx) = 0$$

$$g'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-e^{-x}) = -e^0 = -1 ; \text{ por tanto } \boxed{0 = -1}, \text{ lo cual es absurdo.}$$

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.

Calcula (a) [1'25 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(b) [1'25 puntos] $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-3x}$

Solución

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-0^2}}{0^2} = (0/0) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{2x} \{opero \text{ y simplifico}\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x \cdot 2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2 .$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = (\infty / \infty) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3 \cdot e^{3x}} = (\infty / \infty) \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9 \cdot e^{3x}} = (2 / \infty) = 0$$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001.

[2'5 puntos] Determina la matriz X tal que $AX - 3B = O_3$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

$$AX - 3B = O_3, AX = 3B.$$

Si $|A| \neq 0$ puedo multiplicar por la matriz inversa A^{-1} y tendría $X = A^{-1} \cdot 3B = 3A^{-1} \cdot B$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(1) - 0 + (-1)(2) = 1 - 2 = -1 \neq 0. \text{ Por tanto existe } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & -2 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

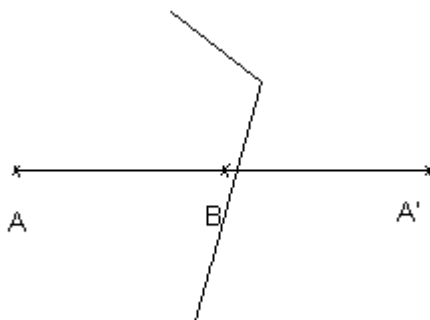
$$\text{Luego } X = 3A^{-1} \cdot B = 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 4 de 2001. -

[2'5 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-1,1)$ con respecto a la recta $\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$

Solución

El simétrico de A respecto r es el simétrico de A respecto del punto B, siendo $B = r \cap \pi$ con π el plano perpendicular a r por A, por tanto el vector normal de π es el vector director de r



La recta en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$. Un vector director de r es $\mathbf{v} = (2,1,3)$ que es el normal de π .

$$\pi \equiv 2(x-0) + 1(y+1) + 3(z-1) = 0 = 2x + y + 3z - 2 = 0$$

$$B = r \cap \pi$$

$$2(5+2\lambda) + 1(\lambda) + 3(2+3\lambda) = 0. \text{ Operando } 14\lambda + 14 = 0, \text{ de donde } \lambda = -1.$$

$$\text{El punto B es } B(5+2(-1), -1, 2+3(-1)) = B(3,-1,-1)$$

B es el punto medio del segmento AA' , siendo A' el simétrico del A pedido, luego

$$(3,-1,-1) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{1+z}{2} \right). \text{ Igualando nos queda } x = 6, y = -1 \text{ y } z = -3, \text{ luego el simétrico es } A'(6,-1,-3)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$

(a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

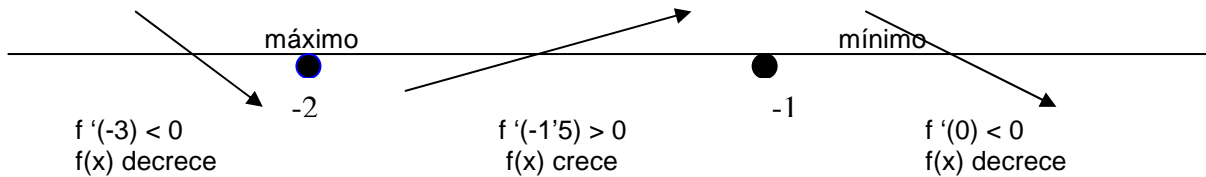
(b) [1'5 puntos] Determina los extremos relativos α y β de f con $\alpha < \beta$ y calcula $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

Solución

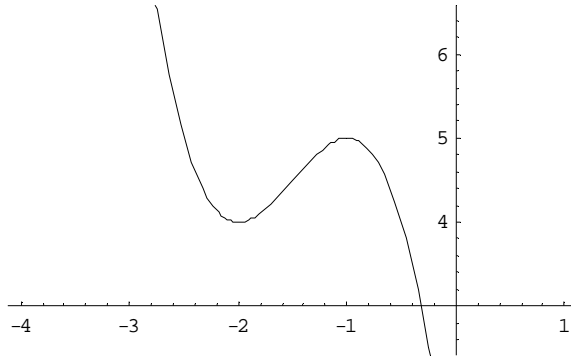
$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

$$f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$$

$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 - 18x - 12 = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$, cuyas soluciones son $x = -1$ y $x = -2$, que serán los posibles máximos o mínimos de la función
Gráficamente



$f(x)$ decrece en $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$, crece en $(-2, -1)$. Tendría un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 5$, porque a la izquierda de -1 crece y a su derecha decrece, y un mínimo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = 4$, porque a la izquierda de -2 decrece y a su derecha crece.
Aunque no la piden la gráfica es



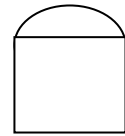
(b) Los extremos relativos ya los hemos calculado que son $x = -2$ y $x = -1$.

$$\int_{-2}^{-1} (-2x^3 - 9x^2 - 12x) dx = \left[\frac{-2x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} =$$

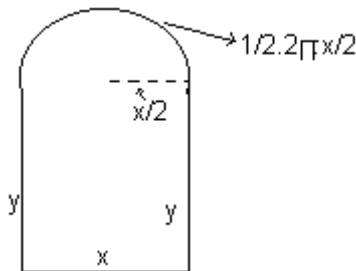
$$= \left[(-1/2)(-1)^4 - 3(-1)^3 - 6(-1)^2 \right] - \left[(-1/2)(-2)^4 - 3(-2)^3 - 6(-2)^2 \right] = (-7/2) - (-8) = 9/2$$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

[2'5 puntos] Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene un perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2 .



Solución



El perímetro es $P = 2y + x + (\pi/2)x$

Área = $2 = x \cdot y + (1/2) \cdot \pi (x/2)^2$. Tenemos $x \cdot y = 2 - (\pi/8) \cdot x^2$ de donde $y = 2/x - (\pi/8) \cdot x$. Sustituyendo en el perímetro tenemos

$P = 2y + x + (\pi/2)x = 2[2/x - (\pi/8) \cdot x] + x + (\pi/2)x = 4/x - (\pi/4) \cdot x + x + (\pi/2) \cdot x$. Derivando tenemos

$$P'(x) = 4(-1/x^2) - (\pi/4) + 1 + (\pi/2)$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 4(-1/x^2) - (\pi/4) + 1 + (\pi/2) = 0 \rightarrow 4/x^2 = -(\pi/4) + 1 + (\pi/2) = 1 + (\pi/4) = (4 + \pi) / 4, \text{ de donde}$$

$$x^2 = 16/(4 + \pi), \text{ con lo cual } x = \pm \sqrt{\frac{16}{4 + \pi}} = \pm \frac{4}{\sqrt{4 + \pi}}. \text{ (La solución negativa no sirve pues es una longitud)}$$

$$P''(x) = -4(-2) \cdot x^{-3} = \frac{8}{x^3}$$

Como $P''(+\sqrt{\frac{16}{4 + \pi}}) = 2\sqrt{4 + \pi} > 0$, $x = \sqrt{\frac{16}{4 + \pi}}$ es un mínimo

Como $P''(-\sqrt{\frac{16}{4 + \pi}}) = -2\sqrt{4 + \pi} < 0$, $x = -\sqrt{\frac{16}{4 + \pi}}$ es un máximo

Las dimensiones son por tanto $x = \frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$ e $y = 2/x - (\pi/8)x = (2\sqrt{4+\pi})/4 - (\pi/8)(\frac{4}{\sqrt{4+\pi}})$

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) [1'5 puntos] Calcula el determinante de las matrices: $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.
 (b) [1 punto] Halla la matriz A^{-1} .

Solución

(a)

Sabemos que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$, siendo n el orden de la matriz A , y que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
 Luego de $A \cdot A^{-1} = I$, tenemos $|A \cdot A^{-1}| = |I| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$, pues el determinante de la matriz identidad vale 1. De $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, obtenemos $|A^{-1}| = 1 / |A|$. Con lo anterior ya lo resolvemos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8(-1) = -8$$

$$|A^{31}| = |A| \cdot |A| \dots \{31 \text{ veces}\} \cdot |A| = (-1) \cdot (-1) \dots \{31 \text{ veces}\} \cdot (-1) = (-1)^{31} = -1$$

$$|(A^{31})^{-1}| = 1 / (|A|)^{31} = 1 / (-1) = -1$$

(b)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = 1 / (-1) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 4 de 2001.

[2'5 puntos] Halla el punto de la recta $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ que equidista del punto $A(1,2,1)$ y del origen de coordenadas

Solución

Ponemos la recta en paramétricas y elegimos un punto genérico

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \text{ . Un punto genérico sería } X(\lambda, -2+2\lambda, 3-\lambda)$$

Nos dicen que $d(A,X) = d(O,X)$, es decir $\|\overline{AX}\| = \|\overline{OX}\|$

$$\overline{AX} = (\lambda-1, 2\lambda-4, -\lambda+2); \overline{OX} = (\lambda, -2+2\lambda, 3-\lambda)$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (2\lambda-4)^2 + (-\lambda+2)^2} = \|\overline{AX}\| = \|\overline{OX}\| = \sqrt{(\lambda)^2 + (2\lambda-2)^2 + (3-\lambda)^2}$$

Elevando las raíces al cuadrado y operando nos queda $8\lambda = 8$, de donde $\lambda = 1$, y el punto pedido es $X(1, 2(1)-2, 3-1) = X(1, 0, 2)$